GUIDE DES ÉTUDES

Master Mathématiques

Première Année

2021 – 2022

Directeur des études

Jean Fromentin
jean.fromentin@univ-littoral.fr

Présidente de Jury

Maria Mabel Cuesta León
mabel.cuesta@univ-littoral.fr

Secrétariat pédagogique

Emmanuelle Alvarez
emmanuelle.alvarez@univ-littoral.fr
☎ : 03 21 46 36 06

Centre Universitaire de la Mi-Voix 50 rue Ferdinand Buisson BP 699 62228 CALAIS Cedex

Présentation de la Formation

Objectifs

Le master Mathématiques est une formation académique qui propose une initiation à la recherche dans divers domaines des mathématiques, fondamentales ou appliquées. Il s'agit d'une formation co-habilitée avec les universités du Littoral Côte d'Opale, de Lille, d'Artois et de Valenciennes.

Le master Mathématiques offre une formation approfondie en mathématiques fondamentales et appliquées (analyse, analyse numérique et équations aux dérivées partielles (EDP), algèbre, géométrie, probabilités et statistiques). Les principaux objectifs sont :

- fournir un bagage solide et de haut niveau en mathématiques, balayant un large spectre de thématiques,
- compléter les connaissances des étudiants pour le concours externe de l'Agrégation de mathématiques,
- initier à la recherche et permettre une poursuite en doctorat.

À l'ULCO seul le parcours « préparation au concours de l'Agrégation » est proposé mais une poursuite en doctorat est possible.

Filières

Le recrutement en M1 s'effectue auprès des étudiants sortant des licences de mathématiques des universités régionales, nationales et auprès d'étudiants étrangers via par exemple des programmes Erasmus et inter-universitaires.

Publics concernés

Les étudiants titulaires d'une licence de Mathématiques obtenue en France peuvent présenter un dossier de candidature pour le M1 Mathématiques. L'admission est subordonnée à l'examen de ce dossier, et conditionnée aux capacités d'accueil du M1 Mathématiques.

Compte tenu de la diversité en termes de contenu des licences au niveau national, un aménagement du cursus peut éventuellement être proposé. Les étudiants n'ayant pas le titre requis et les titulaires d'un diplôme étranger doivent s'adresser à la Commission de Validation des Acquis de l'Université du Littoral Côte d'Opale.

Le redoublement est soumis à décision du jury. Les « enjambements » entre M1 et M2 ne sont pas autorisés. Les ingénieurs diplômés de certaines Grandes Écoles ou les titulaires de l'Agrégation Externe peuvent aussi présenter un dossier. Les diplômes étrangers sont soumis à validation par la Commission compétente de l'Université concernée.

L'année M2 du Master Mathématiques est ouverte de plein droit à tout étudiant ayant validé l'année M1 du Master Mathématiques.

Organisation

Le Master s'obtient en deux années. Chaque année est divisée en deux semestres de 13 à 14 semaines d'enseignement : de septembre à janvier pour le premier, de janvier à juin pour le deuxième.

À l'issue de chaque semestre, a lieu la première session d'examens. En juin, se déroule la deuxième session ou *session de rattrapage* relative à chacun des deux semestres. Chaque semestre doit être validé, il n'y a pas de compensation semestrielle.

Semestre 1

Unités d'Enseignements	ECTS	Volume horaire
Probabilités	8	63
Analyse	8	63
Algèbre	8	63
Mathématiques assistées par ordinateur	3	18
Anglais scientifique (semestre 1)	2	20
PPP - Oral (semestre 1)	1	23

Semestre 2

Unités d'Enseignements	ECTS	Volume horaire
Analyse complexe	9	60
Algèbre et Géométrie	9	60
Équations aux dérivées partielles et analyse numérique	9	60
Anglais scientifique (semestre 2)	2	20
PPP - Mémoire (semestre 2)	1	20

Toutes les UE mentionnées dans le tableau ci-dessus sont obligatoires.

Semestre : 1 ECTS : 8	**Probabilités**
Descriptif du contenu	**Partie 1** 1. Quelques notions de théorie de la mesure (tribus ; mesures ; lemme des classes monotones ; fonctions mesurables ; mesure image ; intégrale d'une fonction étagée, d'une fonction positive, fonctions intégrables ; théorèmes de convergence monotone et dominée). 2. Espaces de probabilités, variables aléatoires, lois classiques (définition d'une variable aléatoire et de sa loi, fonction de répartition, espérance, variance, moments, inégalités de Markov et Tchebychev, fonction caractéristique, fonction génératrice, lois usuelles discrètes et continues). 3. Conditionnement, indépendance (probabilités conditionnelles, indépendance d'événements et de variables aléatoires, lemme de Borel-Cantelli). Mesure produit. **Partie 2** 1. Convergence de suites de variables aléatoires (convergence spatiale, convergence en loi, loi des grands nombres, théorème central limite, vecteurs aléatoires gaussiens, théorème central limite multidimensionnel). 2. Espérance conditionnelle (dans un espace discret, pour des variables aléatoires dans L^1 et dans L^2 par projection orthogonale, propriétés). 3. Martingales (définition d'une martingale à temps discret dans un espace discret, temps d'arrêt, théorèmes d'arrêt, théorèmes de convergence).
Volume horaire	21h CM, 42h TD
Modalités évaluations	Un devoir surveillé de 3h et un examen de 3h par session (E1 et E2) Note session 1 = 1/2 DS + 1/2 E1 Note session 2 = max(Note session 1, E2) Le DS portera sur la partie 1, l'examen E1 sur la partie 2 et l'examen E2 sur les deux.
Langue	Français
Enseignants	**Partie 1** : Dominique Schneider, `dominique.schneider@univ-littoral.fr` **Partie 2** : Nicolas Chenavier, `nicolas.chenavier@univ-littoral.fr`

<table>
<tr><th>Semestre : 1
ECTS : 8</th><th>Analyse</th></tr>
<tr><td>Descriptif du contenu</td><td>

Partie 1

1. **Espaces de Hilbert**
Espaces préhilbertiens, produit scalaire, norme associée. Théorème de la projection. Base orthonormale, Inégalité de Bessel, Identité de Parseval. Théorème de représentation de Riesz.
2. **Les théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle**
Espaces normés, espaces de Banach. Applications linéaires et continues entre espaces normés. Le théorème de Hahn-Banach. Le principe de la borne uniforme. Le théorème du graphe fermé. Le théorème de l'application ouverte.

Partie 2

1. **Séries de Fourier**
Définition, polynômes trigonométriques. Résultats de convergence globale, formule de Parseval. Résultat de convergence ponctuelle, théorème de Dirichlet.
2. **Transformation de Fourier et convolution**
Rappels sur l'intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$. Produit de convolution $f*g$ avec $f \in L^1$ et $g \in L^p$ $(p \geq 1)$. Approximations de l'unité, application à la régularisation. Transformation de Fourier sur L^1 : définition, propriétés élémentaires, transformée d'un produit de convolution. Lemme de Riemann-Lebesgue. Formule d'inversion. Formule sommatoire de Poisson. Transformation de Fourier-Plancherel sur L^2 à partir de $L^1 \cap L^2$.
3. **Introduction à la théorie des distributions (si le temps le permet)**
Espace de Schwartz S et distributions tempérées. Opérations sur les distributions : multiplication par une fonction C^∞, dérivation. Exemples classiques (Heaviside, Dirac, $\ln|x|$,vp()...). Transformation de Fourier sur S et sur S'.

</td></tr>
<tr><td>Volume horaire</td><td>21h CM, 42h TD</td></tr>
<tr><td>Modalités évaluations</td><td>Un devoir surveillé de 3h et un examen de 3h par session (E1 et E2)

Note session 1 = 1/2 DS + 1/2 E1
Note session 2 = max(Note session 1, E2)

Le DS portera sur la partie 1, l'examen E1 sur la partie 2 et l'examen E2 sur les deux.</td></tr>
<tr><td>Langue</td><td>Français</td></tr>
<tr><td>Enseignants</td><td>Partie 1 : Mabel Maria León Cuesta, mabel.cuesta@univ-littoral.fr

Partie 2 : Antoine Benoit, antoine.benoit@univ-littoral.fr</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Semestre : 1
ECTS : 8</td><td>Algèbre</td></tr>
<tr><td>Descriptif
du contenu</td><td>Partie 1 – Compléments sur les groupes et anneaux
1. Groupes abéliens de type fini.
2. Théorèmes de Sylow.
3. Groupes de petit ordre.
4. Modules sur un anneau.
5. Extensions entières d'anneaux.
6. Théorèmes de normalisation de Noether.
7. Théorème des zéros de Hilbert.
Partie 2 – Arithmétique et extension de corps
1. Symbole de Legendre, symbole de Jacobi. Loi de réciprocité quadratique.
2. Extension de corps, degré. Élément algébrique, transcendant. Extensions algébriques, transcendantes.
3. Corps de rupture, corps de décomposition, clotûre algébrique.
4. Construction des corps finis.
5. Extension quadratique. Extension cyclotomique.</td></tr>
<tr><td>Volume
horaire</td><td>21h CM, 42h TD</td></tr>
<tr><td>Modalités
évaluations</td><td>Un devoir surveillé de 3h et un examen de 3h par session (E1 et E2)
Note session 1 = 1/2 DS + 1/2 E1
Note session 2 = max(Note session 1, E2)
Le DS portera sur la partie 1, l'examen E1 sur la partie 2 et l'examen E2 sur les deux.</td></tr>
<tr><td>Langue</td><td>Français</td></tr>
<tr><td>Enseignants</td><td>Partie 1 : Shalom Eliahou, <code>shalom.eliahou@univ-littoral.fr</code>
Partie 2 : Jean Fromentin, <code>jean.fromentin@univ-littoral.fr</code></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Semestre : 1
ECTS : 3</th><th>Mathématiques assistées par ordinateur</th></tr>
<tr><td>Descriptif
du contenu</td><td>Ce module est une introduction à l'option C - Algèbre et Calcul Formel - du concours de l'agrégation de mathématiques.

Divers thèmes mathématiques y seront abordés :
1. Décomposition de Dunford
2. Résultant
3. Courbes algébriques
4. Méthodes de chiffrements
5. Codes correcteurs d'erreurs
6. Calcul de complexité

Ces notions seront illustrées à l'aide de l'outil informatique à travers le logiciel SageMath.</td></tr>
<tr><td>Volume
horaire</td><td>18h TD</td></tr>
<tr><td>Modalités
évaluations</td><td>Un devoir (DS) sous forme de TP noté en session 1 et un examen (E2) en session 2.

Note session 1 = DS
Note session 2 = max(1/2 DS +1/2 E2, E2)</td></tr>
<tr><td>Langue</td><td>Français</td></tr>
<tr><td>Enseignants</td><td>Loïc Foissy, `loic.foissy@univ-littoral.fr`

Jean Fromentin, `jean.fromentin@univ-littoral.fr`</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Semestre : 1 et 2
ECTS : 2 et 2</th><th>Anglais scientifique</th></tr>
<tr><td>Descriptif
du contenu</td><td>La plupart des travaux de recherche en mathématiques sont aujourd'hui publiés en anglais. L'objectif de ce cours est de fournir les bases de l'anglais scientifique qui sont nécessaires afin de lire un texte mathématique écrit en anglais ainsi que de suivre et donner un exposé scientifique en anglais.
Pendant ce cours, donné en anglais, on revisitera quelques thèmes traités en licence d'un point de vue avancé.
Algèbre linéaire
L'espace des matrices d'un rang donné ; espaces vectoriels quotients ; forme normale d'opérateurs linéaires.
Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$
Rappel du calcul différentiel ; application de la notion de sous-variété aux extremas liés.

Si le temps le permet, d'autres sujets seront abordés.</td></tr>
<tr><td>Volume horaire</td><td>20h TD par semestre</td></tr>
<tr><td>Modalités
évaluations</td><td>Chaque semestre est évalué séparément.
Un examen de session 1 (E1) et un examen de session 2 (E2)
Note session 1 = E1
Note session 2 = max(E1, E2)</td></tr>
<tr><td>Langue</td><td>Anglais</td></tr>
<tr><td>Enseignants</td><td>Christian Miebach, <code>christian.miebach@univ-littoral.fr</code></td></tr>
</table>

Semestre : 1 ECTS : 1	**PPP - Oral**
Descriptif du contenu	Ce module est conscacré à la découverte des oraux — Algèbre et Géométrie — Analyse et Probabilités de l'Agrégation externe de mathématiques. Après une découverte du déroulement spécifique de ces oraux, nous travaillerons en groupe à la préparation de différentes leçons (2 en Algèbre et Géométrie et 2 en Analyse et Probabilités). Les étudiants seront alors évalués lors d'un passage à l'oral.
Volume horaire	20h TD pour l'oral + 3h TD sur l'insertion professionelle en cas d'eéhec aux concours.
Modalités évaluations	En contrôle continu lors du ou des passages à l'oral (O1). En cas de multiple passage à l'oral nous considérerons la moyenne arithmétique des notes obtenues. Un oral de session 2 (O2) pourra être proposé si nécessaire. Note session 1 = O1 Note session 2 = max(O1, O2)
Langue	Français
Enseignants	Romuald Ernst, `romuald.ernst@univ-littoral.fr` Loïc Foissy, `loic.foissy@univ-littoral.fr` Jean Fromentin, `jean.fromentin@univ-littoral.fr` Bruno Martin, `bruno.martin@univ-littoral.fr`

Semestre : 2 ECTS : 9	**Analyse complexe**
Descriptif du contenu	**Partie 1** 1. **Introduction** Rappels du programme de Licence sur les fonctions holomorphes. Théorème de convergence de Weierstrass. 2. **Méthodes constructive** Fonctions holomorphes définies par une intégrale, séries et produits infinis de fonctions holomorphes, exemples, étude des fonctions Γ et ζ. **Partie 2** 1. **Compacité** Brefs rappels du programme de L sur la compacité des espaces métriques. Théorèmes d'approximation de Weierstrass et de Stone-Weierstrass. Théorème d'Ascoli sur un espace métrique compact. Théorème de Riesz (un espace normé dont la boule unité fermée est compacte, est de dimension finie). 2. **Convergence uniforme sur tout compact** Topologie métrique associée à une famille dénombrable de semi-normes. Cas de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact pour l'espace $C(\Omega)$ des fonctions continues dans l'ouvert Ω. Théorème de Montel. 3. **Représentation conforme** Biholomorphismes. Théorème de représentation conforme de Riemann.
Volume horaire	20h CM, 40h TD
Modalités évaluations	Un devoir surveillé de 3h et un examen de 3h par session (E1 et E2) Note session 1 = 1/2 DS + 1/2 E1 Note session 2 = max(Note session 1, E2) Le DS portera sur la partie 1, l'examen E1 sur la partie 2 et l'examen E2 sur les deux.
Langue	Français
Enseignants	**Partie 1** : Bruno Martin, `bruno.martin@univ-littoral.fr` **Partie 2** : Christian Miebach, `christian.miebach@univ-littoral.fr`

Semestre : 2 ECTS : 9	**Algèbre et géométrie**
Descriptif du contenu	**Partie 1 – Formes Quadratiques en Algèbre, Géométrie et Arithmétique** 1. Isométries du plan d'Euclide : groupe euclidien, groupe orthogonal 2. Espaces quadratiques de dimension finie, régularité et orthogonalité 3. Somme orthogonale et diagonalisation, rang et déterminant 4. Classification des espaces quadratiques complexes, réels et finis 5. Isotropie et plans hyperboliques, simplification et décomposition de Witt 6. Etude du groupe orthogonal d'un espace quadratique 7. Anneau de Witt : définition et exemples **Partie 2 – Représentations linéaires des groupes finis** 1. Cas des groupes abéliens finis : caractères, groupe dual, transformée de Fourier. 2. Représentations linéaires d'un groupe (sur un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des complexes), sous-représentations, morphismes de représentations. Exemples (représentations de permutation, régulière, ...). 3. Représentations irréductibles, décomposition, lemme de Schur. 4. Caractères, orthogonalité, fonctions centrales. Décomposition de la représentation régulière en somme de représentations irréductibles. Table de caractères. Caractérisation des groupes abéliens finis 5. Caractères de groupes de petit cardinal. Lien avec la géométrie (groupes des polyèdres).
Volume horaire	20h CM, 40h TD
Modalités évaluations	Un devoir surveillé de 3h et un examen de 3h par session (E1 et E2) Note session 1 = 1/2 DS + 1/2 E1 Note session 2 = max(Note session 1, E2) Le DS portera sur la partie 1, l'examen E1 sur la partie 2 et l'examen E2 sur les deux.
Langue	Français
Enseignants	**Partie 1** : Isar Stubbe, `isar.stubbe@univ-littoral.fr` **Partie 2** : Loïc Foissy, `loic.foissy@univ-littoral.fr`

<table>
<tr><th>Semestre : 2
ECTS : 9</th><th>Équations aux dérivées partielles et analyse numérique</th></tr>
<tr><td>Descriptif du contenu</td><td>Ce cours a pour objectif de présenter des résultats d'analyse des équations aux dérivées partielles, des méthodes numériques pour la résolution approchée de ces EDPs (avec leur analyse), puis des méthodes efficaces pour la résolution des systèmes linéaires obtenus lors de la discrétisation. Certaines séances de TD auront lieu sur machine pour permettre aux étudiants de réaliser des projets en lien avec le cours.

Partie 1 – Étude théorique de problèmes elliptiques
1. Espaces de Sobolev : définition des espaces (H^m, H_0^m) et propriétés élémentaires. Inégalité de Poincaré. Théorèmes de trace et de recollement. Formule de Green. Injections de Sobolev, compacité (théorème de Rellich).
2. Théorème de Lax-Milgram - Formulation variationnelle : théorème de Lax-Milgram (théorèmes de projection sur un convexe fermé, d'existence d'un supplémentaire orthogonal, de Riesz, de Lax-Milgram). Formulation variationnelle (exemples d'un problème de Dirichlet, d'un problème de Neumann). Problème de la régularité.

Partie 2 – Approximation par éléments finis
1. Approximation variationnelle : méthode d'approximation interne, lemme de Céa.
2. Eléments finis : définition d'un élément fini, familles d'éléments finis. Éléments finis de Lagrange, de Hermite, autres types d'éléments finis. Méthode d'éléments finis, obtention du système linéaire.
3. Estimations d'erreur : erreur d'interpolation locale et application à l'interpolation de Lagrange, erreur d'interpolation globale, convergence de la méthode des éléments finis.</td></tr>
<tr><td>Volume horaire</td><td>20h CM, 40h TD</td></tr>
<tr><td>Modalités évaluations</td><td>Un devoir surveillé de 3h et un examen de 3h par session (E1 et E2)

Note session 1 = 1/2 DS + 1/2 E1
Note session 2 = max(Note session 1, E2)

Le DS portera sur la partie 1, l'examen E1 sur la partie 2 et l'examen E2 sur les deux.</td></tr>
<tr><td>Langue</td><td>Français</td></tr>
<tr><td>Enseignants</td><td>Partie 1 : Lionel Rosier, lionel.rosier@univ-littoral.fr
Partie 2 : Christophe Bourel, christophe.bourel@univ-littoral.fr</td></tr>
</table>

Semestre : 2 ECTS : 1	**PPP – Mémoire**
Descriptif du contenu	L'étudiant devra choisir un sujet de mémoire parmi ceux proposés par des enseignants. Avec l'aide de l'encadrant, il devra rédiger un rapport et en exposer une partie durant une soutenance orale.
Volume horaire	Travail personnel et rencontres régulières avec l'encadrant.
Modalités évaluations	Rapport (R) et soutenance (S). Note = 1/2 R + 1/2 S
Langue	Français et/ou anglais